

El legado de Jacques-Louis Lions (1928-2001) a través de sus libros: mi limitada visión

por

Jesús Ildefonso Díaz

El 17 de mayo de 2001 fallecía en París uno de los matemáticos más distinguidos del siglo XX: Jacques-Louis Lions.

El legado de Jacques-Louis Lions va mucho más allá de sus 20 libros y casi 600 publicaciones². Su intuición excepcional y una capacidad de trabajo fuera de lo normal le llevaron a abrir nuevos campos de desarrollo para la matemática cultivados después por numerosos especialistas. Fundador de lo que se podría denominar como Matemática Aplicada francesa, su obra ha dejado también una enorme huella en otros muchos países y en especial en el nuestro. Su activa participación como formador de doctores españoles³ (lista que comenzaría en los sesenta con Antonio Valle Sánchez y se extendería más tarde a J.A. Fernández Viña, J. L. Andrés Yebra, C. Fernández Pérez y M. Lobo Hidalgo)⁴ fue reconocida con su nombramiento como Doctor Honoris Causa por las universidades Complutense, Politécnica de Madrid, Santiago de Compostela y Málaga, y como miembro extranjero de la Real Academia de Ciencias.



Desde la triste fecha de su desaparición han sido muchos los obituarios dedicados a su figura (véase por ejemplo Temam [113], Magenes [107], Ciarlet [11], el dedicado por la AMS a cargo de Lax, Magenes y Temam [42], las notas aparecidas en nuestro país, Valle [115], Díaz [18], y los *Temoignages*⁵ vertidos

²La gran actividad mantenida hasta unos meses antes de que le venciera la enfermedad explica que puedan existir trabajos suyos aún en trámites de publicación.

³Su primera visita a España data de 1963. Su viaje, financiado por la Embajada de Francia, consistió en tres etapas (Barcelona, Zaragoza y Madrid) en las que impartió una serie de conferencias de las que existen unas notas escritas ([57]). Fue con ocasión de ese viaje cuando entabló gran amistad con Alberto Dou, quien desde entonces favoreció, de manera providencial, los contactos con él y su escuela.

⁴No siempre figuraría oficialmente como su director y, de hecho, su labor de formación se extendió a muchos otros “jóvenes” matemáticos españoles.

⁵Debidos a J. P. Aubin, A. Bensoussan, J. Cea, J.-P. Dias, J.I. Díaz, E. Magenes, J. Periaux, O. Pironneau, J. P. Puel, P.-A. Raviart, E. Rofman, R. Temam, A. Theis, G. Tronel y E. Zuazua.

en el número 55, de octubre de 2001, de la revista *Matapli* de la sociedad francesa SMAI. Seguramente, muchos otros están por aparecer. A parte de pequeños *workshops* que colateralmente recuerdan su obra, un gran coloquio en su honor ha sido organizado a celebrar en París, del 1 al 5 de julio de este año⁶. Pese a la magnitud de ese evento estoy seguro que no será el último que se organice con esa finalidad.

Cuando los directores de LA GACETA tuvieron la gentileza de invitarme a escribir una notas sobre el profesor Lions me sugirieron abordar prioritariamente una descripción de su obra científica, dada la avalancha de testimonios de otro tipo que se iba a producir en los que sus responsabilidades en grandes centros e instituciones (INRIA, CNES, UMI, Académie des Sciences, del año mundial de las Matemáticas, etc.) serían objeto de consideración.

Entre otras opciones posibles, me decanté por utilizar la cronología de sus libros como jalones indicativos de tan abrumador empeño, con la intención de ilustrar, aunque sólo fuese de manera sucinta, su inmensa obra⁷. Pero esta perspectiva no podrá dejar de ser limitada en varios sentidos. En primer lugar, difícilmente puede dejar de ser limitado un artículo de este estilo cuando existe tal diferencia de talla científica entre quien lo escribe y el homenajeado. Pero además, el artículo aparece también limitado pues se trata de una glosa en alguna manera inacabada: lo comencé antes del verano del año pasado y lo cierro ahora, en enero de 2002, siguiendo la sugerencia de los directores de la revista de no aplazar su aparición por más tiempo. Cada vez que lo releía añadía nuevos comentarios y referencias y otros muchos que me venían a la cabeza quedaban sin plasmar. Temía que esto se pudiese alargar eternamente, por lo que tomé como buena la sugerencia de los directores. Finalmente, no quisiera dejar de señalar que la redacción de estas líneas está en deuda con numerosos amigos y colegas que leyeron y enriquecieron el manuscrito.

DE SU TESIS DOCTORAL A SU PRIMER LIBRO: PROBLEMAS DE CONTORNO LINEALES

Jacques-Louis Lions nació en Grasse, un bello pueblo cercano a Niza. Su padre fue alcalde de dicha localidad durante casi treinta años. Su mujer, Andrée, que le ha sobrevivido, también es oriunda de allí. Los Lions disfrutaban pasando las vacaciones en su localidad natal, alternando con otras estancias en la montaña. La luminosidad y peculiaridades del sur de Fran-

⁶Información detallada sobre el coloquio y sobre otros testimonios aparecidos sobre Jacques-Louis Lions pueden encontrarse en la página <http://acm.emath.fr/congres-jllions>

⁷J.-L. Lions solía facilitar únicamente la lista de sus libros junto a una breve descripción de los detalles de su perfil académico y un breve listado de sus distinciones más sobresalientes cuando le requerían su curriculum por motivos oficiales. De alguna manera, otorgaba a sus libros carta de representatividad de su dilatada obra científica.

cia seguramente impregnaron el carácter abierto y optimista de Lions⁸, quien hacía gala, en sobremesas distendidas, del privilegio de ser mediterráneo. Por deseo suyo, sus restos reposan en Grasse.

Su periodo de formación universitaria le llevaría a París, donde ingresaría y permanecería, de 1947 a 1950, en la Ecole Normale Supérieure, una institución creada en tiempos de Napoleón que acoge a los alumnos más brillantes de cada promoción tras unas pruebas de selección de gran dificultad. Su primer puesto de trabajo fue como investigador, sin docencia, en el CNRS, trabajando bajo la dirección de Laurent Schwartz, quien había recibido la *medalla Fields*, en 1950, por su *teoría de las distribuciones*. El tema de tesis de Lions, así como el de otros alumnos de Schwartz, Bernard Malgrange y François Trèves, era el desarrollo de la aplicabilidad de la *teoría de las distribuciones* a los problemas de contorno, tema que el propio Schwartz apenas abordaría a lo largo de su dilatada obra⁹.

En junio de 1955 y tras una serie de notas en las Comptes Rendus de la Académie des Sciences de París¹⁰, Lions defendía su tesis ([49]), en París, en la que sistematizaba la aplicación de la teoría de las distribuciones a los problemas lineales de contorno. Eran los inicios de una manera de abordar esos problemas de ecuaciones en derivadas parciales mediante la aplicación de resultados abstractos del Análisis Funcional en espacios de Banach y del que el famoso *Lema de Lax-Milgram* ([43]) es un excelente ejemplo para el caso de ecuaciones elípticas. Lions pronto amplió el espectro de problemas considerado en su tesis, abordando numerosos problemas diferentes como, por ejemplo, el difícil caso de las condiciones de contorno de tipo oblicuo ([50]) o el de los problemas lineales de evolución (tanto parabólicos como hiperbólicos) para los que obtuvo un resultado abstracto semejante al de Lax-Milgram y que hoy día es denominado como *Teorema de Lions* en los textos de Análisis Funcional y de Ecuaciones en Derivadas Parciales (véase, por ejemplo, el texto de Brezis [10]). La sistematización de esas contribuciones le conduciría a su primer libro ([55])

⁸En lo que sigue me referiré a Jacques-Louis Lions meramente por su apellido, especificando su nombre únicamente en caso de posible confusión con su hijo Pierre-Louis.

⁹Lions y Schwartz escribieron un único artículo en colaboración (Lions y Schwartz [92]), de interés marginal para el conjunto de sus obras científicas. En mi opinión, y como se puede deducir de la descripción de sus inquietudes en su autobiografía (véase Schwartz [110]) el interés de Schwartz por las aplicaciones fue mucho más tenue. Pese a esta obvia diferencia, Lions mantenía un gran aprecio y guardaba un recuerdo constante de sus años bajo la dirección de Schwartz. En una ocasión me comentó que preparando las palabras de agradecimiento ante la recepción de la Legión de Honor (en grado de Commandeur) que le entregaría Mitterrand unos días más tarde, en 1993, todavía le venía a la cabeza la figura de Schwartz diciéndole que su discurso se podía refinar aún más.

¹⁰Ésta sería una revista muy apreciada por él a lo largo del resto de su vida científica. En ella presentaría, de manera sistemática, las primeras versiones de sus contribuciones. Lions contribuyó, de manera crucial, a la buena salud que hoy goza tal revista, potenciando la publicación en ella entre sus discípulos, colaboradores y otros autores.

que publicaría en 1961 aludiendo a las *ecuaciones diferenciales operacionales* por referirse a ecuaciones abstractas, $u'(t) + Au(t) = f(t)$, sobre espacios de Banach en los que “los coeficientes” dependientes de la solución $u(t)$ vienen dados por un operador no acotado $Au(t)$.

ACTIVIDAD EN FRENTES SIMULTÁNEOS: CUASI-REVERSIBILIDAD

La actividad de Lions dejará pronto huellas de un interés desplegado en diferentes líneas de investigación. Así, en breve sus trabajos tratarían sobre un tema distinto al de su tesis: el estudio de los soportes para productos de composición y la transformada de Laplace ([47], [48]). En el mismo periodo de elaboración de lo que sería su primer libro también había abordado temas muy diversos tales como el estudio de los espacios de Beppo Levi (junto a J. Deny, [16]), los espacios definidos por una integral de Dirichlet (en colaboración con L. Hörmander [38]), la *transmutación* de operadores diferenciales en el campo complejo (con J. Delsarte [15]). También había comenzado la consideración de temas que, más tarde, serían objeto de sendos libros: los problemas no lineales ([52]) y la interpolación de espacios¹¹ y sus aplicaciones ([53]).

En 1967 Lions publicaba su segundo libro (en colaboración con Lattès [41]), que traduciría al inglés¹² el mismísimo R. Bellman. Trataba de un tema distinto a los anteriores: el estudio de las condiciones bajo las cuales un problema en ecuaciones en derivadas parciales está “bien puesto” (en el sentido de J. Hadamard) y cuándo es posible vulnerar esas condiciones generales para “hacer reversible” lo que usualmente no lo es. A diferencia de otras ocasiones, la colaboración con R. Lattès no tenía más antecedente que un pequeño trabajo conjunto ([40]).

PERIODO DE ACTIVIDAD MÁGICA: PROBLEMAS NO HOMOGÉNEOS, CONTROL Y PROBLEMAS NO-LINEALES

En el periodo en que redactaba esos dos libros, Lions desplegó una actividad investigadora que le llevaría a publicar tres libros en 1968, seguidos de otros dos muy cercanos en el tiempo; uno en 1969 y otro en 1970.

¹¹Esta sería una de sus aportaciones más cercanas a lo que se podría denominar “matemática pura”: partiendo de una función perteneciente a dos espacios vectoriales topológicos distintos, se trata de caracterizar los muchos otros espacios en los que esa función queda automáticamente inmersa.

¹²Un aspecto permanente en cada uno de los libros de Lions, sobre el que no volveré a incidir, es su traducción a otros idiomas, entre los cuales el inglés y el ruso son fijos y a veces incluyen el japonés y el chino. A Lions le gustaba hacer referencia explícita a los nombres de los traductores.

Tres de los libros antes mencionados se refieren a la obra en colaboración con Enrico Magenes¹³ ([84]) desarrollada con una larga serie de artículos que se iniciaba en 1960. En este caso, el objetivo que los autores abordaban era los *problemas de contorno no homogéneos*. En la práctica, las ecuaciones en derivadas parciales y/o las condiciones de contorno no son homogéneas sino que vienen igualadas a unas funciones independientes de la incógnita del problema (ya sea escalar o vectorial). Se trataba de caracterizar, con la mayor precisión posible, los espacios funcionales requeridos para que tales problemas estuviesen bien planteados. Era necesario ir más allá de los espacios de Sobolev de índices naturales (introducidos por L. A. Sobolev a finales de los años treinta) y recurrir a datos en espacios de Sobolev de índices negativos y fraccionarios de manera que las “energías asociadas” a las soluciones estuviesen bien definidas. Las soluciones de los problemas de contorno no tienen por qué ser funciones continuas, aunque siempre son integrables en el sentido de Lebesgue y la correcta interpretación de su *traza*, o restricción, sobre un conjunto de medida nula (como es el borde del abierto sobre el que se plantea la ecuación en derivadas parciales) requiere un análisis fino. En realidad, en el periodo entre 1957 y 1968, Lions estaba desarrollando en paralelo la *teoría de la interpolación* entre espacios de Hilbert, o de Banach, cuyas aplicaciones al caso de los espacios de Sobolev suministraban la materia prima de su extensa y sistemática obra con Magenes. Parece que Lions comenzó a interesarse por estos temas a raíz de una estancia posdoctoral de un año en la Universidad de Kansas con Nachman Aronszajn. Lions comenzó aplicando métodos de la teoría de funciones de variable compleja (al igual que lo haría A. Calderón). Más tarde (bien mediante contribuciones suyas o en colaboración con C. Foias [30] y en especial con J. Peetre [85]) desarrolló nuevos métodos, esta vez de funciones de variable real.

Otro de los libros antes aludidos, en lo que muy bien se podría denominar como “periodo de actividad mágica” de Lions, se refiere a un campo distinto a los anteriores que pasaría a ser su campo principal de actividad¹⁴: *la Teoría de Control*. El acercamiento de Lions hacia ese tema vino precedido de un trabajo de 1965, en colaboración con Guido Stampacchia ([93], [94]), sobre *inecuaciones variacionales*, tema muy cercano al Cálculo de Variaciones al que me referiré más adelante. Es a partir de 1966 cuando Lions se plantea dar respuesta a una pregunta tan general y ambiciosa como ésta: ¿es posible “controlar” los sistemas regidos por ecuaciones en derivadas parciales? Las herramientas de la Teoría de Control asequibles en ese momento eran el *principio del máximo de Pontryaguin*, el de la *programación dinámica de Bellman*

¹³Magenes se convertiría en uno de sus mejores amigos. Sería quien pronunciase unas palabras de reconocimiento en los dos homenajes celebrados en París con motivo del 60 y 70 aniversarios de Lions.

¹⁴La cátedra del Collège de France que ocuparía Lions desde 1973 hasta su jubilación, en 1998, llevaba como título el de *Analyse Mathématique des Systèmes et de leur Contrôle*.

y la *teoría del filtro de R. Kalman*¹⁵: todas ellas introducidas para sistemas finito-dimensionales dados por ecuaciones diferenciales ordinarias. El impulso decisivo para su extensión a sistemas infinito-dimensionales, regidos por ecuaciones en derivadas parciales, fue dado por Lions en una serie de tres notas en 1966 ([59])¹⁶ a las que siguió su libro ([60]) que no ha cesado de ser objeto obligado de referencia por haber marcado “un antes y un después” en esa teoría, abriendo un fértil campo de investigación.

El último libro, que culmina el “periodo de actividad mágica” de Lions es el dedicado a problemas no lineales aparecido en 1969 ([61]). Tras las breves notas, de 1958, dedicadas a problemas cuasilineales ([52]), Lions se ocupó, en 1959, del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que modela la dinámica de los fluidos incompresibles. Pese a las profundas contribuciones sobre tan fundamental sistema, que parten ya de la obra de L. Euler, este complicado problema no lineal no había recibido un tratamiento matemático general hasta la aparición de los resultados de Jean Leray en una serie de trabajos de comienzos de los años treinta (véase, por ejemplo, [44]). La existencia de soluciones globales en el tiempo, para el caso tridimensional y bajo adecuadas hipótesis, fue obtenida en 1950 por E. Hopf. En su nota ([54]) Lions simplificó y extendió el resultado de Hopf, abordando la cuestión de la unicidad de soluciones, para el caso bidimensional¹⁷ en colaboración con G. Prodi¹⁸ ([87]). De esta manera, sus contribuciones junto a las de O.A. Ladyzhenskaya y J. Serrin, daban cuerpo a la forma usual en la que se presenta ahora el tratamiento matemático de la dinámica de fluidos incompresibles (véase, por ejemplo Temam, [112]). Su afamado libro de problemas no lineales fue la fuente en la que muchos autores, entre los que me cuento, iniciaron sus pasos. El texto, abarcaba una gama enormemente variada de problemas no lineales, presentados de una manera altamente original y pedagógica; no tanto en atención al problema particular considerado sino organizado en diferentes capítulos según los métodos empleados. Lions recogía en él tanto sus resultados sobre ecuaciones de evolución no lineales (obtenidos con W. A. Strauss [95]) como los obtenidos con su admirado J. Leray¹⁹ ([45]), sobre ecuaciones elípticas cuasilineales motivadas

¹⁵Lions me comentó en varias ocasiones su profunda admiración por el resultado de Kalman que, en particular, hacía posible el control “en tiempo real” de las trayectorias de las naves espaciales tras fluctuaciones imprevistas.

¹⁶Un testigo excepcional de aquel momento crucial para la teoría de control para EDPs fue Antonio Valle. Lions citó, durante bastante tiempo, los resultados obtenidos bajo su dirección (Valle [114]).

¹⁷El problema de la unicidad de soluciones globales y el estudio de posibles singularidades para datos iniciales generales es uno de los siete problemas abiertos que la Fundación Clay distinguió en el 2000 dotando su resolución con un millón de dolares.

¹⁸Hermano de Romano Prodi, ex-Primer Ministro del gobierno italiano y actual presidente de la Unión Europea.

¹⁹Lions dejó muchas trazas de su gran admiración por la obra de Leray, encumbrado al Collège de France anteriormente a él. Recuerdo que una noche de mayo de 1998, cenando

por el Cálculo de Variaciones, provenientes en ciertos casos particulares, como ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a puntos estacionarios de adecuados funcionales.

Un capítulo de lectura obligada durante muchos años fue el dedicado al método de monotonía. Los resultados abstractos de la teoría lineal (como el *Lema de Lax-Milgram* o los de su tesis) ahora requerían la noción de *operador monótono* ya sea de un espacio de Hilbert en su dual o bien en sí mismo²⁰. El segundo de los casos es requerido a la hora de extender el *Teorema de Hille-Yosida* de generación de *semigrupos de contracciones* al caso de operadores no lineales. Lions ya se había ocupado tempranamente, en 1957 ([51]), de este bello teorema enlazando las ecuaciones diferenciales en espacios de Hilbert (de dimensión infinita en las aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales) y el Análisis Funcional. La noción de monotonía aparecía también ligada al Cálculo de Variaciones pues la *derivada Gâteaux* de un funcional (que igualada a cero expresa las ecuaciones de Euler-Lagrange) es un operador monótono, supuesto que el funcional sea convexo (propiedad satisfecha en numerosas aplicaciones relevantes). La *teoría de operadores monótonos* estaba siendo desarrollada, en paralelo, por muchos otros autores, tales como Eduardo Zarantonello, George Minty y, especialmente, Felix Browder. Una de las aportaciones fundamentales del trabajo de Leray y Lions [45] fue observar que bastaba que los términos de mayor orden de la ecuación en derivadas parciales fuesen monótonos, aunque la presencia de términos de orden inferior impidiesen que “todo” el operador lo fuese. Propusieron una noción abstracta a ese respecto (*operador del Cálculo de Variaciones*) que más tarde sería redondeada con la noción de *operador pseudo-monótono* por un joven discípulo de Lions en su tesis de tercer ciclo: Haïm Brezis. El libro de Lions extendía unas notas (tomadas por F. Murat) de su curso de tercer ciclo²¹ en la universidad de París VI²² en 1968/1969 que,

con él y su esposa, Andrée, en el restaurante “Le coupe chou”, cercano al Collège y al que acudía con asiduidad con sus invitados, nos rogó que le dispensásemos pues Leray le había pedido que le telefonara a las nueve en punto para terminar una conversación iniciada en la mañana. Lions tenía entonces 71 años y Leray 93. En aquella cena me contó detalles sobre como Leray había rehecho, sin saberlo, resultados previos sofisticados a la hora de culminar su artículo en común.

²⁰El lector no ha leído mal: pese a que el *teorema de Riesz* permite identificar el dual de un espacio de Hilbert a sí mismo, tal identificación no puede ser aplicada cuando se manejan a la vez dos espacios distintos (aunque uno tenga inclusión continua y densa en el otro $V \subset H$). En ese caso se alcanza lo que Lions, jocosamente, llamaba “trinidad” $V \subset H = H' \subset V'$. Con gran frecuencia el espacio H viene dado por $L^2(\Omega)$, donde Ω es un abierto acotado de \mathbb{R}^N . El espacio V suele corresponder a un espacio de Sobolev que incluye las condiciones de contorno (por ejemplo, $V = H_0^1(\Omega)$ para problemas de segundo orden y condiciones de Dirichlet homogéneas).

²¹Lions tenía por costumbre cambiar de año en año el tema de su curso de postgrado. Desde su afiliación en el Collège de France esto constituía su única obligación docente.

²²Aunque impartido en el Institute Henri Poincaré.

de un carácter excepcionalmente exhaustivo para su tiempo, contenía también resultados originales suyos o de sus distintos alumnos²³.

MODELOS: INECUACIONES VARIACIONALES

Si la obra de Lions, hasta 1969, se puede enmarcar en dos campos típicos de su actividad (el Análisis Matemático y la Teoría de Control), otro de ellos, el de la construcción de modelos, no sería desarrollado sistemáticamente hasta que comenzó su colaboración con Georges Duvaut en el curso 1969-1970 ([25])²⁴. Tal colaboración se plasmó en una serie de más de una decena de trabajos y culminaría con el texto [26] en el que se exponía, de manera sistemática, la obtención de modelos para numerosos problemas de la Mecánica y de la Física dados en términos no ya de ecuaciones sino de inecuaciones, que se pueden ilustrar, a modo de ejemplos elementales, mediante problemas de la Mecánica Analítica con ligaduras unilaterales²⁵. El texto de Duvaut y Lions se centra en la consideración de ese tipo de ligaduras en el contexto de la Mecánica de Medios Continuos. Los antecedentes se remontan al llamado *problema de Signorini* en el que de un cuerpo elástico sólo se conoce su imposibilidad de penetrar (aunque con capacidad de apoyarse) en otro cuerpo rígido. Tras el tratamiento dado por G. Fichera [29], Guido Stampacchia había encontrado en [111] un resultado abstracto (generalizando el *Lema de Lax-Milgram*) que permitía mostrar la existencia de solución para inecuaciones variacionales de tipo estacionario. La sistematización matemática a casos más generales y, especialmente, a problemas dinámicos fue fruto de la colaboración entre Stampacchia y Lions ([93], [94]). Con su libro, Duvaut y Lions mostraron la universalidad de ese tipo de formulaciones al hacerlas emerger en contextos insospechados: desde problemas de climatización, flujos de fluidos no-newtonianos (como los polímeros, la lava, los glaciares, etc.), hasta problemas de antenas formulados en términos de inecuaciones variacionales asociadas a las ecuaciones de Maxwell.

En dos libros escritos con Alain Bensoussan ([3], [4]), Lions analizaría las aplicaciones de las inecuaciones variacionales a la *teoría de Control Estocástico* y al *Control impulsional*. Ambos textos son fruto de una intensa

²³Lions agradece en el prólogo los comentarios recibidos de sus alumnos C. Bardos, H. Brezis, P. Raviart, L. Tartar y R. Temam.

²⁴Como ya se ha comentado, Lions se había ocupado antes del análisis matemático de las ecuaciones de Navier-Stokes pero apenas desde el punto de vista de su obtención a partir de los principios fundamentales de la Mecánica de Fluidos.

²⁵No viene mal recordar que si bien la definición de *ligadura unilateral* aparece en las primeras páginas de casi todos los textos de Mecánica Analítica, con el fin de distinguirla de la usual, de tipo *bilateral*, sin embargo, la práctica totalidad de los textos se limitan a la consideración de estas últimas (véase, como ejemplo indicativo, las primeras páginas del texto de Goldstein [36]).

colaboración²⁶ que se inició en 1972 a raíz de la creación por Lions del IRIA (más tarde INRIA). Contienen una gran cantidad de conexiones con problemas planteados en Economía²⁷. En el primero de esos libros se ofrece un tratamiento muy exhaustivo de la posibilidad de obtener expresiones formalmente explícitas de las soluciones de EDPs (incluso no lineales). En el caso de las ecuaciones hiperbólicas de primer orden es bien sabido que su solución viene dada explícitamente en términos de las características. En el caso de las ecuaciones parabólicas o elípticas se tienen fórmulas semejantes pero ahora las características deben ser reemplazadas por *procesos estocásticos*. Los métodos probabilísticos aplicados a EDPs son muy adecuados para obtener estimaciones en L^∞ frente a las estimaciones en espacios de Sobolev obtenidas por métodos de energía.

En este libro, Bensoussan y Lions abordan las *ecuaciones de Hamilton-Jacobi y problemas de la teoría de juegos* asociados a procesos de control estocástico denominados de *tiempo de parada*. Es por esto que, a mi juicio, el libro puede entenderse como antesala de una buena parte de la obra de Pierre-Louis Lions, quien años más tarde llevaría a cabo un tratamiento mucho más sistemático y general de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi (P.L. Lions [104]) que no están en forma divergencial para las que introduciría (junto a Mike Crandall) la crucial noción de *soluciones de viscosidad*²⁸.

El primero de los libros fruto de la colaboración entre Lions y Bensoussan recoge, tempranamente, la construcción de un modelo matemático sofisticado (dado en términos de inecuaciones variacionales) para problemas provenientes ahora (a diferencia del libro con Duvaut) de Economía como, por ejemplo, problemas de opciones mercantiles (allí denominado *Probleme de Warrant*) abordado originalmente en Samuelson-Mac Kean ([108]) antes de la explosión de los modelos matemáticos sobre el riesgo en mercados financieros cuyo ex-

²⁶Tal colaboración se mantuvo viva hasta el final de sus días. De la gran cercanía entre ambos da buena fe el hecho de que sería Alain Bensoussan (entre los muchos discípulos de Lions con una obra excepcional) quien le sucedería (por dos veces) al abandonar la presidencia del INRIA, primero, y más tarde del CNES (en ese caso no de forma consecutiva).

²⁷En realidad la colaboración entre ellos comenzó en torno al Análisis Numérico. Tal y como me señaló Lions, su artículo conjunto con Temam ([7]) de más de 150 páginas podría considerarse como un libro. Curiosamente, aunque tal trabajo apenas fue mencionado en su día entre los especialistas (apareció en las actas de un congreso), en los últimos años está siendo muy citado (especialmente desde que Lions se ocupase, junto con Pironneau, de los métodos de descomposición para el cálculo paralelo).

²⁸Los dos excepcionales matemáticos (Jacques-Louis y su hijo Pierre-Louis) apenas se harían mención mutua en sus trabajos. Únicamente, a raíz de la incursión de Pierre-Louis en problemas de la Mecánica de Fluidos, las citas (especialmente del padre a los dos libros de su hijo sobre el tema: [106]) se harían algo más frecuentes, aunque, en todo caso, en grado muy reducido.

ponente más famoso es la conocida ecuación de Black-Scholes²⁹. El interés de Lions por modelos provenientes de la Economía se mantendría a lo largo de su vida (véanse, por ejemplo su trabajos sobre los equilibrios de Pareto ([69]), de Nash y de von Stakelberg ([79]) y nuestro artículo en común sobre esos temas [23]).

Ese libro contiene también unos resultados sobre estimaciones de localización de fronteras libres (previamente publicado en forma de artículo en [2]) que abundaba en un resultado pionero de Brezis ([10]). Lions fue uno de los fundadores del amplio campo de los denominados *Free Boundary Problems* que hoy día cultivan multitud de especialistas. No sólo consideró tempranamente las inecuaciones variacionales como problemas típicos que originan fronteras libres (delimitando las regiones donde se alcanzan las restricciones impuestas). Su libro sobre problemas no lineales ([61]) dedicaba también una enorme atención (inusual para la época) a otros problemas de frontera libre que luego han sido objeto de atención pormenorizada y monografías especializadas tales como el problema de Stefan, la ecuación de los medios porosos y diversas ecuaciones para el p-Laplaciano³⁰.

El segundo libro fruto de la colaboración con Bensoussan ([4]) fue concebido como una continuación de [3]. Los problemas de control considerados se refieren al caso en el que, entre otras cosas, se ha de decidir en qué instantes y con qué impulso se actúa sobre un sistema complejo. Es el llamado *control impulsional* que tiene gran relevancia en las aplicaciones (por ejemplo, en el caso de las centrales hidráulicas) y que conducen a una variante de las inecuaciones variacionales en las que *el obstáculo* depende de la propia solución: son las denominadas *inecuaciones cuasivariacionales*. Además de poseer interesantes aplicaciones a problemas surgidos de la Economía, años más tarde se vería que tal tipo de modelos son de interés también en ciertos problemas de la Mecánica de Medios Continuos (véase, por ejemplo, la monografía de Baiocchi y Capelo [1]). Lions haría una sucinta presentación del contenido de sus dos libros con Bensoussan en varios cursos que luego aparecerían publicados en forma de libros y que contenían también nuevos resultados y otros temas distintos: el que impartió en la Universidad de Montreal³¹ en 1976 ([64]) y el impartido en Beijing en 1981 y que citaba con frecuencia ([66]).

²⁹El reconocimiento de la importancia del estudio matemático de los “derivados financieros” llegaría en 1997 con la concesión a R.C. Merton y M. Scholes del premio Nobel en Economía. F. Black había fallecido en 1973.

³⁰Lions participó de manera activa en los primeros congresos monográficos que se celebraron sobre el tema. Asimismo inauguró la nueva revista *Interfaces and Free Boundaries* con su artículo (Lions [81]).

³¹Tuve ocasión personal de constatar tempranamente la generosidad y atención de Lions hacia los más jóvenes cuando, en 1976, tras haber visitado Madrid para recibir el nombramiento de Doctor Honoris Causa por la Universidad Complutense, Jose Luis Andrés Yebra y yo le escribimos solicitándole información sobre las notas de aquel curso. Su respuesta nos dejó impresionados: a vuelta de correo mandó a Jose Luis (antiguo alumno suyo) una copia,

ANÁLISIS NUMÉRICO DE EDP's

Desde sus comienzos, el nombre de Lions ha sido asociado al tratamiento matemático de los mayores problemas tecnológicos (tanto de su país como de la esfera internacional) inquietud que contrastaba con el espíritu bourbaquista imperante en la matemática francesa. El tratamiento de esos sistemas complejos no podría limitarse, obviamente, a aspectos teóricos y cualitativos sino que requería ineludiblemente una aproximación cuantitativa en términos de algoritmos del Análisis Numérico. Sin embargo, es curioso que la primera *publicación oficial* de Lions sobre Análisis Numérico data de 1966 (Lions-Raviart [88]) pese a que su interés en ese campo tuviera sus orígenes en 1958 cuando impartió diferentes cursos sobre el tema tras su llegada a la Universidad de Nancy (de la que fue profesor de 1954 a 1962). De hecho, Lions impartió tempranamente cursos en París, antes y después de marchar a Nancy: lo hizo en el CEA (la agencia francesa de energía nuclear) y más tarde lo haría en Electricité de France, el Instituto del CNRS Blaise Pascal (cuyas notas aparecerían en tres tomos ([58])) y en su propia universidad parisina. Fruto de sus enseñanzas y dirección arrancarían las carreras de prestigiosos especialistas tales como J. Cea, P.A. Raviart, R. Temam, J.P. Aubin, Ph. Ciarlet, R. Glowinski y muchos otros.

Comenzó interesándose por métodos en diferencias finitas. Más tarde se ocupó (tesis doctoral de Cea, de 1960) del método de elementos finitos (aunque en aquellas fechas no fuese denominado como tal) discretizando, no ya la propia ecuación en derivadas parciales sino la formulación variacional correspondiente, dada en términos de multiplicación por adecuadas funciones *test*, para los problemas de contorno que él había sistematizado en su propia tesis. El método era usado de manera rudimentaria por los ingenieros pero le faltaba una fundamentación matemática. A continuación, centró su atención en las condiciones de estabilidad de los algoritmos (tesis de Raviart) y en algoritmos de descomposición (trabajos en colaboración con Temam y Bensoussan). Unas notas de sus cursos de Análisis Numérico, tomadas por sus estudiantes en 1961 (que comenzó impartiendo en la que más tarde pasaría a ser la Universidad París VI) aparecerían en 1973 ([62]) al hacerse cargo de un curso análogo en la Ecole Polytechnique (que mantendría entre 1966 y 1986).

Las etapas naturales que se le planteaban a continuación fueron las de desarrollar métodos de aproximación para las inecuaciones variacionales y la Teoría de Control. La primera tarea la comenzó con su artículo ([63]) y culminó con la publicación, en 1976, de dos volúmenes en colaboración con R. Glowinski y R. Trémoieres ([35]) y la segunda, años más tarde con una serie de artículos en los que Glowinski sería de nuevo su colaborador principal: [32] en 1990 y [33], en 1995 (este último de más de 300 páginas publicado en los dos primeros números de la revista *Acta Numérica*).

de más de trescientas páginas, de sus notas manuscritas (de su puño y letra) de lo que luego sería el texto de su libro y que conservamos como valiosa joya.

Tan sólo unos años antes de su muerte comenzaría a desarrollar un ambicioso programa sobre la adecuada formulación de procesos de descomposición para el cálculo paralelo³². Esto le llevó a preparar un largo listado de notas en las Comptes Rendues en colaboración principalmente con O. Pironneau, aunque también con Glowinski y otros autores (véase, por ejemplo, [86], [34] y sus referencias), llegando a anunciar un libro en preparación sobre el tema en colaboración con Pironneau³³.

PERTURBACIONES SINGULARES Y HOMOGENEIZACIÓN

El curso 1970/71 Lions comenzó a impartir una serie de cursos de doctorado sobre problemas de contorno conteniendo un pequeño parámetro, ε , en alguno de los muchos datos posibles de su formulación (término independiente, datos en el contorno, operador diferencial, dominio, etc.) y que en general respondía a regularizaciones del problema límite formal obtenido para $\varepsilon = 0$. De nuevo, su propósito era dar una coherencia matemática a diferentes métodos asintóticos, técnicas clásicas de la Matemática Aplicada (véanse, por ejemplo, el texto de Eckhaus [27]), de uso frecuente en Ingeniería³⁴, pero con enormes dificultades para justificar resultados rigurosos de convergencia en los espacios funcionales en los que “debía” encontrarse la “solución límite”. Un primer resultado de esas inquietudes fue una serie de artículos que culminará con el voluminoso Lecture Notes de la Serie de Springer-Verlag aparecido en 1973 ([65]).

Esa nueva línea de investigación tendría su continuación natural en una larga colaboración con A. Bensoussan y G. Papanicolau (que comenzó con [6]) y que cristalizó con el famoso libro Bensoussan-Lions-Papanicolau [5]) en el que se sistematizaba el llamado *método de homogeneización* referente al estudio de problemas involucrando dos escalas características (espaciales o temporales) bien distintas: una microscópica, rápidamente oscilante, y la macroscópica. Estos métodos se revelaron fundamentales para el estudio de numerosos problemas tales como la construcción de modelos matemáticos para multi-estructuras elásticas (sólidos tridimensionales acoplados con paneles, varillas, etc.), flujos de fluidos en medios porosos y fabricación de nuevos materiales a través de materiales compuestos. El desarrollo matemático de ese tipo de técnicas tuvo (y mantiene en la actualidad) un vigor excepcional de-

³²A este respecto solía mencionar el artículo de Pierre-Louis Lions ([105]) como un avance conceptual relevante.

³³Quizás debido a sus responsabilidades en grandes instituciones, Lions se mantenía muy al día sobre los progresos en las capacidades de computación de las distintas generaciones de superordenadores. Se ocupó del tema en varios artículos y libros de carácter divulgativo ([46], [75], [73], [24]). A este respecto, manifestó reiteradamente su admiración por la clarividencia de J. von Neumann.

³⁴Uno de los ejemplos más ilustrativos es la teoría de la *capa límite* de Prandtl en Hidrodinámica.

sarrollado por alumnos directos como Tartar, Ciarlet, Murat y otros, y por matemáticos de gran prestigio como, por ejemplo, E. de Giorgi y O. Oleinik, por citar tan sólo dos de ellos³⁵.

CONTROLABILIDAD: EL MÉTODO HUM

Tras la publicación de su primer libro sobre control ([60]), Lions fue abordando nuevos problemas de esa teoría a medida que se iba embarcando en nuevas líneas de investigación. Así, por ejemplo, fue desarrollando, como capítulos aislados, el estudio del control para problemas con perturbaciones singulares y problemas de escalas múltiples.

En 1980, Lions centró su curso en el Collège de France sobre el control de sistemas distribuidos singulares en los que la ecuación de estado presenta singularidades y origina fenómenos peculiares tales como: inestabilidades, fenómenos de explosión en tiempo finito, soluciones múltiples, fenómenos de bifurcación, etc. Fruto de su atención por tales problemas (que mantendría hasta el final de sus días) fue el libro ([67]). Poco a poco fue interesándose más por cuestiones de controlabilidad que por el control óptimo. La controlabilidad para ecuaciones que dan lugar a fenómenos de explosión en tiempo finito atrajo de manera profunda su atención. Una conjetura que mantenía a este respecto era que a medida que un sistema generaba más inestabilidades era más fácil de controlar³⁶.

En 1986, con motivo de la conferencia impartida al recibir el premio “John von Neumann” otorgado por SIAM ([70]), Lions introdujo un nuevo método general para estudiar la controlabilidad de sistemas: el HUM o “Hilbert Uniqueness Method”. Su idea clave fue la de construir unas nuevas normas en el espacio de los datos (condiciones iniciales, datos de contorno, etc.) y aplicar sofisticados teoremas de unicidad retrógrada del tipo de los debidos a Holmgren, Calderón o Mizohata. El método fue primeramente aplicado a ecuaciones hiperbólicas, dando lugar a dos volúmenes ([71]) que correspondían de nuevo a las notas de su curso en el Collège de France (esta vez tomadas por E. Zuazua).

³⁵Es de resaltar el papel (más o menos implícito) que varios científicos españoles desempeñaron en los orígenes de la teoría de la homogeneización, en especial de la mano de E. Sánchez Palencia quien se interesó muy tempranamente por ese tipo de técnicas, publicando su primer libro sobre el tema ([109]), en 1980. Sánchez-Palencia se instaló en París a mediados de los sesenta tras terminar sus estudios de ingeniero aeronáutico en la Escuela de Madrid e impartió, en 1965, un par de conferencias en el seminario sobre técnicas asintóticas organizado por Amable Liñán (destacado especialista en métodos de escalas múltiples aplicados a problemas de Mecánica de Fluidos y de Combustión). E. Sánchez Palencia mantuvo una estrecha relación con Lions (que se prolongaría hasta el final y que originó varios trabajos en colaboración: véase, por ejemplo, [89], [90] y [91]).

³⁶Esto fue rigurosamente mostrado en dos trabajos en colaboración con E. Zuazua sobre ecuaciones de orden superior a dos ([102], [103]). Véanse también nuestros trabajos ([21], [22]) para la ecuación semilineal de orden dos.

En un libro posterior, escrito en colaboración con Lagnese ([83]), desarrolló la aplicabilidad de ese método al caso de problemas provenientes de la Teoría de la Elasticidad.

Me parece interesante resaltar, por lo que tiene de significativo sobre las conexiones de la obra de Lions con nuestro país, que la (nada trivial) adaptación de esa fina técnica al caso de ecuaciones parabólicas la presentó Lions en las *Jornadas Hispano-Francesas sobre control de sistemas distribuidos* que, organizadas por Antonio Valle, tuvieron lugar en Málaga, en 1991. En su conferencia (que luego aparecería en las actas [76] y continuaría en [74]) Lions se refirió también a un problema que a partir de ese momento sería objeto de atención de los especialistas en el campo: la controlabilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes. Entre los muchos trabajos a los que dieron origen sus conjeturas son de citar los de E. Fernández-Cara ([28], sobre una versión debilitada de la controlabilidad), Coron ([12], para el caso de las ecuaciones de Euler), Fursikov-Imanuvilov [31], Lions-Zuazua ([99], [100], [101] en los que se da un resultado de controlabilidad genérica para el sistema de Stokes y respuestas en términos del desarrollo de Galerkin) e Imanuvilov [39], entre otros muchos trabajos de esos y otros especialistas.

Estos nuevos métodos de demostración de la controlabilidad (aproximada) para ecuaciones parabólicas contrastan con los establecidos previamente por Lions en su libro ([60]) que tenían un carácter no constructivo (empleaban el Teorema de Hahn-Banach). Gracias al carácter constructivo ahora introducido se hizo posible la aproximación numérica de los controles (programa desarrollado principalmente por Lions y Glowinski al que ya me he referido anteriormente).

ENCICLOPEDIAS: DAUTRAY Y CIARLET

Una descripción de la obra de Lions sería necesariamente parcial sin aludir a su inmensa labor de edición y, más en particular, a la enciclopedia, de más de cuatro mil páginas³⁷ concebida y coordinada en colaboración con Robert Dautray entre 1984 y 1985 ([14]). Su título, *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, da idea de la ambición de la tarea emprendida. La enciclopedia podría ser catalogada como una visión actualizada de la crucial obra de Courant y Hilbert ([13]). Muchos son los temas que no aparecían ni siquiera esbozados en aquella obra de la primera mitad de los cincuenta. Pero como se indica en el prólogo de Dautray y Lions

La llegada de los ordenadores, sus progresos inmensos e incesantes,
han permitido -por primera vez en la historia- calcular con gran

³⁷Llama la atención que el listado de colaboradores de tan magna obra se limite a 17 matemáticos franceses, aunque todos ellos de reconocido prestigio internacional de la talla del fallecido Philippe Benilan.

seguridad y rapidez, a partir de modelos, cantidades que hasta entonces no habían podido ser más que estimadas de manera muy aproximada. Esto brindó, a investigadores e ingenieros, la posibilidad fundamental de poder utilizar resultados numéricos para la modificación o adaptación de razonamientos, experiencias y realizaciones en curso.

Lions formó parte del comité editorial de un número casi interminable de revistas y de series de libros. Sin embargo, a él le gustaba resaltar en especial la serie de 12 volúmenes coeditados con Haïm Brezis en Pitman-Longman conteniendo buena parte de las conferencias tenidas en el Seminario semanal que ambos mantuvieron en el Collège de France y que se prolongarían en dos volúmenes más, desde el 1998, esta vez coeditado con Doina Cioranescu. Asimismo, prestó una especial atención a dos series de libros publicados por Masson, ambas coeditadas con P.G. Ciarlet (*Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*, de 21 volúmenes, y *Recherches en Mathématiques Appliquées*, de 42 volúmenes). Finalmente, había comenzado, de nuevo con P.G. Ciarlet, la publicación del *Handbook of Numerical Analysis*, en North-Holland, del que de momento han aparecido 7 volúmenes a los que seguirán otros que están en trámites de publicación.

MEDIO AMBIENTE: CENTINELAS PARA DATOS INCOMPLETOS Y “EL PLANETA TIERRA”

El primer testimonio oficial del interés de Lions por temas de Medio Ambiente (entendido en un sentido amplio que incluye campos tales como la Meteorología, Climatología, Oceanografía, Ecología, etc.) parece ser que fue su conferencia *Pollution, Atmosphère et Climat* impartida en el Colloque Présidence de l’Assemblée Nationale, Hôtel de Lassay, París, el 4 de marzo de 1989. Desde el punto de vista matemático, su interés se acrecentó a medida que iba desarrollando la *teoría de los centinelas* que introdujo para el tratamiento de *sistemas con datos incompletos* (característicos en procesos del Medio Ambiente) en una serie de Notas en las Comptes Rendus ([72]) y que más tarde darían lugar a su libro [77]. Roger Temam subraya en [113] que quizás fuese el hecho de presidir, en 1990, el CNES (Centre National d’Etudes Spatiales) y el Consejo Científico de la Agencia Meteorológica francesa lo que le llevase a ocuparse de ese tipo de temas. En todo caso, lo que me parece digno de reseñar es que fue con motivo del curso que impartió en el Instituto de España, del 15 al 19 de enero de 1990, con el que aparecería el primer trabajo de Lions al respecto. Las notas de su curso (que él trajo previamente mecanografiadas en francés) darían lugar a su libro de divulgación *El Planeta Tierra: el papel de las matemáticas y los superordenadores* que tuvo el honor y el placer de traducir al castellano (junto a Miguel Artola). Ello me dio la oportunidad de sugerirle algunos comentarios. El libro apareció publicado en

Espasa-Calpe ([73]) junto a un apéndice, de carácter más técnico, para el que solicitó mi colaboración.

En una serie de artículos con Roger Temam y Shouhong Wang (que comenzaron con dos largos artículos [96], [97]) Lions y esos autores lograron culminar el análisis matemático de las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la atmósfera, el océano, el sistema acoplado atmósfera-océano [98]³⁸, y que venían siendo utilizadas para la previsión computacional desde los años sesenta en que su admirado von Neumann abordara tan complejo programa. Desarrollaron también estudios rigurosos de tipo asintótico y numérico. Con motivo de su nombramiento como miembro extranjero de la Real Academia de Ciencias española, Lions impartió una conferencia ([80]) en la que se refirió al programa japonés sobre “El simulador de la Tierra” en el que el objetivo es acoplar globalmente numerosos modelos deterministas y estocásticos sobre cada uno de los subsistemas del planeta Tierra.

Tuve la gran suerte de organizar con él dos cursos de verano³⁹ de la Universidad Complutense de Madrid en torno a Matemáticas y Medio Ambiente: el primero en El Escorial, en 1991, concentrado en aspectos físicos y la construcción de los modelos ([19]) y el segundo en Almería, en 1992, abordando modelos relacionados con los aspectos económicos originados por el Medio Ambiente ([20]). Fueron experiencias inolvidables para mi. Tuve ocasión de conocer de cerca las dotes de Lions en el diseño de los cursos, ofreciendo una idea de conjunto ante situaciones enormemente complejas y su trato exquisito, tanto desde el punto de vista científico como humano, con todos los participantes⁴⁰.

Más recientemente, desde julio de 1999, nuestra relaciones científicas se habían estrechado aún más. En su fax de 29 de julio⁴¹ me informaba que le habían propuesto publicar una segunda edición de su libro del Planeta Tierra (agotado en menos de dos años) pero que su intención era la de preparar todo un nuevo libro incorporando referencias aparecidas desde 1990 y añadiendo varios capítulos complementarios [24]. Me proponía que llevásemos a cabo tal tarea de forma conjunta dada la cercanía de alguno de mis trabajos y mi

³⁸De hecho, Lions incluía este largo trabajo en su lista de libros.

³⁹Lions mantuvo una activa participación en múltiples cursos de verano desde sus comienzos (además de los cursos de Montreal de 1962 y 1976, participó en varios en Italia como, por ejemplo, el del C.I.M.E. de 1962, 1967, etc.). En todos ellos dio muestra de su extraordinaria accesibilidad, lo que era de enorme importancia hacia los más jóvenes, en periodo de formación en esa época.

⁴⁰Lions también me ayudó a organizar, en calidad de co-director junto a C.J. van Duijn, el Advanced Institute de la NATO que celebramos sobre esos temas en Santa Cruz de Tenerife, del 11 al 21 de enero de 1995. En aquella ocasión una pequeña enfermedad le impidió participar y pese a mis insistencias no quiso aparecer como coeditor de las actas ([17]).

⁴¹Lions desplegaba una correspondencia sorprendente por medio del fax de mensajes que solía escribir personalmente de su puño y letra: conservo, como un tesoro, más de cuatrocientas páginas.

participación en la preparación del texto original. Desde entonces trabajamos duramente en aquel proyecto⁴².

Estas líneas no podrían concluir sin unas palabras de agradecimiento hacia una persona como él al que una buena parte de la matemática aplicada española le debe tanto. Pese a su indudable carisma, ofrecía una accesibilidad, una generosidad científica y un temperamento tan extraordinariamente afable que colocaba a su interlocutor en el centro de su preocupación y atención. Su ejemplo será siempre un acicate para las presentes y futuras generaciones.

REFERENCIAS

- [1] BAIOCCHI, C., CAPELO, A., *Variational and Quasivariational Inequalities*, J. Wiley, New York, 1984.
- [2] BENSOUSSAN, A., LIONS, J.-L., On the support of the solution of some Variational Inequalities of Evolution, *J. Math. Soc. of Japan*, **28**, 1976,1-27.
- [3] BENSOUSSAN, A., LIONS, J.-L., *Applications des inéquations variationnelles en Contrôle stochastique*, Dunod-Bordas, Collection M.M.I., Paris, 1978.
- [4] BENSOUSSAN, A., LIONS, J.-L., *Contrôle impulsional et inéquations variationnelles*, Dunod-Bordas, Collection M.M.I., Paris, 1982.
- [5] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. L., PAPANICOLAU, G., Sur quelques phénomènes asymptotiques stationnaires (I), *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **281**, 1975. 89-94.
- [6] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. L., PAPANICOLAU, G., *Asymptotic Methods in Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [7] BENSOUSSAN, A., LIONS, J.-L., TEMAM, R., Sur les méthodes de décomposition, de décentralisation et de coordination et applications, en *Methodes Mathematiques de l'Informatique*, J.-L. Lions y G.I. Marchuk eds. Dunod, Paris 1974, págs. 133-257 (también en *Cahiers IRIA*, **11**, 1972, págs. 5-190).
- [8] BREZIS, H., Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Institut Fourier*, **18**, 1968, 115-175.
- [9] BREZIS, H., Solutions of variational inequalities with compact support, *Uspekhi Mat. Nauk*, **129**, 1974, 103-108
- [10] BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle*, Masson, Paris, 1983. (Hay traducción española: *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1984).
- [11] CIARLET, PH., Jacques-Louis Lions 1928-2001, *Mataplí*, **55**, 2001, 5-16.
- [12] CORON, J.M., On the controllability of 2-D incompressible perfect fluids, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **75**, 1996, 155-188.

⁴²El texto estaba prácticamente acabado a finales del 2000, unos meses antes de su fallecimiento. Lions hizo explícita mención en uno de sus últimos artículos ([82]).

- [13] COURANT, R., HILBERT, D., *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 1 y 2. Interscience, Nueva York, 1953.
- [14] DAUTRAY, R., LIONS, J.-L., *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*, En 3 volúmenes, Collection du C.E.A., Série scientifique, Masson, Paris, 1984 y 1985, reedición en 9 volúmenes, Masson, Paris, 1988. Traducción inglesa *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, 6 volúmenes, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988-1990.
- [15] DELSARTE, J., LIONS, J.-L., Transmutation d'opérateurs différentielles dans le domaine complexe, *Commentarii Mathematici Helvetici*, **32**, 1957, 832-834.
- [16] DENY, J., LIONS, J.-L., Les espaces du type Beppo Levi et applications, *Annales de l'Institut Fourier*, **5**, 1954, 305-370.
- [17] DÍAZ, J. I., ED., *The Mathematics of Models for Climatology and Environment*, NATO ASI Series, Springer Verlag, 1997.
- [18] DÍAZ, J.I., Jacques-Louis Lions: matemático, **EL PAIS**, 19 de mayo de 2001.
- [19] DÍAZ, J.I., LIONS, J.-L., EDS., *Mathematics, Climate and Environment*, Research Notes in Applied Mathematics 27, Masson, Paris, 1993.
- [20] DÍAZ, J.I., LIONS, J.-L., EDS., *Environment, Economics and Their Mathematical Models*, Research Notes in Applied Mathematics 35, Masson, Paris, 1994.
- [21] DÍAZ, J.I., LIONS, J.-L., Sur la contrôlabilité approchée de problèmes paraboliques avec phénomènes d'explosion, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, **327**, Série I, 1998. 173-177.
- [22] DÍAZ, J.I., LIONS, J.-L., On the approximate controllability for some explosive parabolic problems, en *International Series of Numerical Mathematics*, Vol. 133, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999, 115-132.
- [23] DÍAZ, J.I., LIONS, J.-L., On the Approximate Controllability of Stackelberg-Nash Strategies. En *Mathematics and Environment*, Actas de la Vioconferencia sobre Environment de la EMS, J.I. Díaz ed., Springer Verlag, Berlin, 2002.
- [24] DÍAZ, J.I., LIONS, J.-L., *Matemáticas, superordenadores y control para el planeta Tierra*, Editorial de la UCM, 2002.
- [25] DUVAUT, G., LIONS, J.-L., Ecoulement d'un fluide rigide visco-plastique incompressible, *Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France, années 1969-1970*, **II**, 2, 8-14.
- [26] DUVAUT, G., LIONS, J.-L., *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1972.
- [27] ECKHAUS, W., *Singular perturbations*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [28] FERNÁNDEZ-CARA, E., REAL, J., On a conjecture due to J.-L. Lions, *Nonlinear Analysis*, **21**, 1993, 835-847.

- [29] FICHERA, G. Problemi elastostatici con vincoli unilaterali: il problema de Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, **8**, 1964, 91-140.
- [30] FOIAS, C., Sur certains théorèmes d'interpolation, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, **XXII**, 1961, 269-282.
- [31] FURSIKOV, A., IMANUVILOV, O. YU, On the exact boundary zero controllability of the two dimensional Navier-Stokes equations, *Acta Appl. Math.*, **36**, 1994, 1-10.
- [32] GLOWINSKI, R., LI, C. M., LIONS, J. L., A numerical approach to the exact boundary controllability of the wave equations, *Jap. J. of Applied Math*, **7**, 1990, 1-76.
- [33] GLOWINSKI R., LIONS J.-L., Exact and approximate controllability for distributed parameter systems. *Acta Numerica*, 1994, págs. 269-378, 1995, 159-333.
- [34] GLOWINSKI, R., LIONS, J.-L. Y PIRONNEAU, O., Decomposition of energy spaces and applications. *C.R.A.S.*, Paris, **329**, 1, 1999, 445-452.
- [35] GLOWINSKI, R., LIONS, J. L., TREMOLIERES, R., *Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles*, 2 volúmenes, Dunod, París, 1976
- [36] GOLDSTEIN, H., *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley, Massachusetts, 1990. (Hay traducción al castellano: *Mecánica Clásica*, Reverté, Barcelona, 1992).
- [37] HOPF, E., Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen, *Math. Nachr.*, **4**, (1950/51), 213-231.
- [38] HÖRMANDER, L., LIONS, J.-L., Sur la complétion par rapport à une intégrale de Dirichlet, *Mathematica Scandinavica*, **4**, 1956, 259-270.
- [39] IMANUVILOV, O. YU, Remarks on the exact controllability for the Navier-Stokes equations, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **6**, 2001, 39-72.
- [40] LATTÈS, R., LIONS, J.-L., Sur une classe de problèmes aux limites intervenant en Physique des réacteurs. En, *Symposium Centre International provisoire de Calcul*, Birkhäuser, 1960.
- [41] LATTÈS, R., LIONS, J.-L., *Quasi-Réversibilité*, Dunod, Paris, 1967.
- [42] LAX, P., MAGENES, E., TEMAM, R., Jacques-Louis Lions (1928-2001), *Notices of the AMS*, **48**, 2001, 1315-1321.
- [43] LAX, P., MILGRAM, A.N, Parabolic equations, En *Contributions to the theory of Partial Differential Equations*, Ann. Math. Studies **33**, Princeton, 1954, 167-190.
- [44] LERAY, J., Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **12**, 1933, págs. 1-82.

- [45] LERAY, J., LIONS, J.-L., Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **93**, 1965, 97-107.
- [46] LICHNEVSKY, A., LIONS, J.-L., Super-ordinateurs. Evolutions et tendances, *La vie des sciences, C. R. Acad. Scie., Paris*, **1**, núm. 4, julio-septiembre 1984, 263-284.
- [47] LIONS, J.-L., Supports de produits de composition, *C.R.A.S. Paris*, **232**, 1951, 1530-1532.
- [48] LIONS, J.-L., Supports dans la transformation de Laplace, *C.R.A.S. Paris*, **232**, 1951, 1622-1624.
- [49] LIONS, J.-L., Problèmes aux limites en Théorie des Distributions, *Acta Mathematica*, **94**, 1955, 13-153,
- [50] LIONS, J.-L., Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique, *Annals of Mathematics*, **62**, 1956, 207-239.
- [51] LIONS, J.-L., Une remarque sur les applications du théorème de Hille-Yosida, *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **9**, 1957, 62-70.
- [52] LIONS, J.-L., Sur certaines problèmes mixtes quasi-linéaires I, *C.R.A.S. Paris*, **246**, 1958, 1644-1647. Sur certaines problèmes mixtes quasi-linéaires II, *C.R.A.S. Paris*, **246**, 1958, 1796-1799.
- [53] LIONS, J.-L., Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications, *Bulletin Mathématique de la Société Mathématique et Physique de la R.P. de Roumanie*, **2**, 1958, 419-432.
- [54] LIONS, J.-L., Sur l'existence des solutions des équations de Navier-Stokes, *C.R.A.S. Paris*, **248**, 1959, 1099-1102.
- [55] LIONS, J.-L., *Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites*. Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [56] LIONS, J.-L., *Problèmes aux limites dans les Equations aux Dérivées Partielles*, Les Presses de l'Université de Montreal, 1962.
- [57] LIONS, J.-L., Ecuaciones Diferenciales y Problemas en los Límites. Notas de tres conferencias impartidas (los días 21.22 y 23 de Marzo de 1963) en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona. *Publ. Seminario Matemático de Barcelona*. Abril 1963.
- [58] LIONS, J.-L., *Méthodes d'approximation numérique des problèmes aux limites de la Physique Mathématique*, Publications du CNRS, Institut Blaise Pascal, tome 1 (publ.14111) 1962, tome 2 (publ. CA.14.11.1/AI) 1962, tome 3 (publ. CA/14.11.1A/A1) 1963.
- [59] LIONS, J.-L., Sur le contrôle optimal de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires. Remarques générales (I), *C.R.A.S. Paris*, **263**, 1966, 661-663. (II) Equations elliptiques, *C.R.A.S. Paris*, **263**, 1966, 713-715. (II) Equations d'évolution, *C.R.A.S. Paris*, **263**, 1966, 776-779.

- [60] LIONS, J.-L., *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1968.
- [61] LIONS, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier Villars, Paris, 1969.
- [62] LIONS, J.-L., *Cours d'Analyse Numérique*, Ecole Polytechnique, Paris, 1973.
- [63] LIONS, J.-L., Approximation numérique des inequations d'évolution. En *Constructive Aspects of Functional Analysis, Part I*, Cremonese, Roma, 1973, 295-361.
- [64] LIONS, J.-L., *Sur quelques questions d'Analyse, de Mécanique et de Contrôle optimal*, Les Presses de l'Université de Montreal, 1976.
- [65] LIONS, J. L., *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lecture Notes in Math., 323, Springer, 1973.
- [66] LIONS, J. L., *Some methods in the Mathematical Analysis of Systems and Their Control*, Science Press, Beijing y Gordon Breach, Nueva York, 1981.
- [67] LIONS, J. L., *Contrôle des systèmes distribués singuliers*, Gauthier-Villars, Paris, 1983.
- [68] LIONS, J. L., Remarks on systems with incomplete data, en *Variational Methods in Geosciences*. Y. K. Sasaki, ed., Elsevier, 1986, págs. 145-159.
- [69] LIONS, J. L., Contrôle de Pareto de Systèmes distribués, *CRAS Paris*, **302**, 1986, págs. 223-227 y 413-417.
- [70] LIONS, J. L., Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems, *SIAM Review*, **30**, 1988, 1-68.
- [71] LIONS, J. L., *Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribués*, tomo 1, *Contrôlabilité Exacte*, tomo 2, *Perturbations*, Masson, Paris, 1988.
- [72] LIONS, J. L., Sur les sentinelles des systèmes distribués. 1) Le cas des conditions initiales incomplètes, en *CRAS Paris*, **307**, 1988, 819-823. 2) Conditions frontières, termes sources, coefficients incomplètement connus, *id.*, 865-870. 3) Colloque IFAC, Perpignan, junio 1989.
- [73] LIONS, J.-L., *El planeta Tierra. El papel de las Matemáticas y de los superordenadores*. Serie del Instituto de España **8**, Espasa-Calpe, Madrid, 1990.
- [74] LIONS J.-L., Are there connections between turbulence and controllability? in *Analyse et Optimisation des Systèmes*, Springer Verlag, Lecture Notes in Control and Information Sciences, **144**, 1990, A. Bensoussan and J.-L. Lions eds.
- [75] LIONS, J. L., De la machine à calculer de Blaise Pascal aux ordinateurs, *La vie des Sciences, C.R.A.S. Paris*, **8**, 1991, 221-240.
- [76] J.-L. LIONS, Remarques sur la contrôlabilité approchée. En *Jornadas Hispano-Francesas sobre control de sistemas distribuidos*, Univ. de Málaga, 1991, 77-87.

- [77] LIONS, J. L., *Sentinelles pour les systèmes distribués á données incomplètes*, Masson, Paris, 1992.
- [78] LIONS, J. L., Contrôle à moindres regrets des systèmes distribués, *CRAS Paris*, **315**, 1992, págs.1253-1257.
- [79] LIONS, J.-L., Some Remarks on Stackelberg's Optimization, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **4**, 1994, 477-487.
- [80] LIONS J.-L., Le simulateur de la Terre, *Rev. R. Acad. Cien. Exact. Fis. Nat.*, **92**, 1998, 71-85
- [81] LIONS J.-L., Parallel algorithms for the solution of variational inequalities, *Interfaces and Free Boundaries*, **1**, 1999, 3-16.
- [82] LIONS J.-L., Some Remarks on the Mathematical Modelling of Planet Earth System, *Atti dei Convegni Lincei*, Accademia Nazionale dei Lincei, **158**, 2000, 73-93.
- [83] LIONS, J.-L., LAGNESE, J.E., *Modelling. Analysis and Control of Thin Plates*, Masson, Paris, 1988.
- [84] LIONS, J.-L., MAGENES, E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, Vol.1 1968, Vol.2 1968, Vol. 3, 1970.
- [85] LIONS, J.-L., PEETRE, J., Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **19**, 1963, 5-68.
- [86] LIONS, J.-L., PIRONNEAU, O., Algorithmes parallèles pour la solution des problèmes aux limites, *CRAS Paris*, **327**, 1998, 947-952.
- [87] LIONS, J.-L., PRODI, G., Un théorème d'existence et d'unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension 2, *C.R.A.S. Paris*, **248**, 1959, 3519-3521.
- [88] LIONS, J.-L., RAVIART, P. A., Remarques sur la résolution et l'approximation d'équations d'évolution couplées, *International Computation Center Bulletin*, (UK), **5**, 1-21.
- [89] LIONS, J.-L., SÁNCHEZ-PALENCIA, E., Ecoulement d'un fluide viscoplastique de Bingham dans un milieu poreux, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **60**, 1981, 341-360.
- [90] LIONS, J.-L., SÁNCHEZ-PALENCIA, E., Problèmes aux limites sensitifs, *C.R.A.S., Paris*, **319**, 1994, 1021-1026..
- [91] LIONS, J.-L., SÁNCHEZ-PALENCIA, E., Sensivity problems for some shells with edges, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, **9**, 1997, 1-16.
- [92] LIONS, J.-L., SCHWARTZ, L., Problèmes aux limites sur des espaces fibrés. *Acta Mathematica*, **94**, 1955, 155-159.
- [93] LIONS, J.-L., STAMPACCHIA, G., Inéquations variationnelles non coercives, *C.R.A.S., Paris*, **261**, 1965, 25-27.
- [94] LIONS, J.-L., STAMPACCHIA, G., Variational Inequalities, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **20**, 1967, 493-519.

- [95] LIONS, J.-L., STRAUSS, W.A., Some Nonlinear Evolution Equations, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **93**, 1965, 43-96.
- [96] LIONS, J.-L., TEMAM, R., WANG, S., New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications, *Nonlinearity*, **5**, 1992, 237-288.
- [97] LIONS, J.-L., TEMAM, R., WANG, S., On the Equations of the Large-scale Ocean, New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications, *Nonlinearity*, **5**, 1992, 1007-1053.
- [98] LIONS, J.-L., TEMAM, R., WANG, S., Models for the coupled atmosphere and ocean, *Computational Mechanics Advances*, **1**, 1993
- [99] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., A generic uniqueness result for the Stokes system and its control theoretical consequences, in *PDE and Applications*, eds. P. Marcellini, G. Talenti and E. Visentini, Dekker, **177**, 1996, 221-235.
- [100] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., Contrôlabilité exacte des approximations de Galerkin des équations de Navier Stokes. *C.R.A.S. Paris*, **234**, 1, 1997, 1015-1021.
- [101] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., Exact boundary controllability of Galerkin's approximations of Navier Stokes equations. *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, **XXVI**, 4, 1998, 605-621.
- [102] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., The cost of controlling unstable systems : time irreversible systems. *Revista Mat. Complutense*. **10**, 2, 1997, 481-523.
- [103] LIONS, J.-L., ZUAZUA, E., On the cost of controlling unstable systems : the case of boundary controls. *J. d'Analyse Math.* **73**, 1997, 225-249.
- [104] LIONS, P.L., *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman, London, 1982.
- [105] LIONS, P. L., On the Schwarz Alternating Method, en *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, Glowinski et al., ed., SIAM, Philadelphia, 1988, 1-42.
- [106] LIONS, P. L., *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Volume 1. Incompressible Models*. 1996, *Volume 2. Compressible Models*. 1999, Clarendon Press, Oxford.
- [107] MAGENES, E., Ricordo di Jacques-Louis Lions, *UMI Bolletín*, 2001, 24.
- [108] SAMUELSON, P.A., MAC KEAN, H., Rational theory of Warrant Pricing, *Industrial Management Review*, **6**, 1965, 13-39.
- [109] SANCHEZ-PALENCIA, E., *Non homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Verlag, Berlin, 1980.
- [110] SCHWARTZ, L., *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Editions Odile Jacob, Paris, 1997.
- [111] STAMPACCHIA, G., Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, *C.R.A.S., Paris*, **258**, 1964, 4413-4416.
- [112] TEMAM, R., *Navier-Stokes equations, Theory and Numerical Analysis*, 3^a. ed., North Holland, Amsterdam, 1984.

- [113] TEMAM, R., Obituary of J.-L. Lions, *SIAM News*, **34**, 6, 2001, 2-4.
- [114] VALLE, A., Un problème de contrôle optimum dans certaines équations différentielles d'évolution. *Annali Scuola Norm. Sup. Pisa*, **20**, 1966, 25-30.
- [115] VALLE, A., En memoria de Jacques-Louis Lions, *Boletín de SEMA*, **18**, 2001, 9-13.

Jesus Idefonso Díaz
Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Matemáticas,
Universidad Complutense de Madrid
28040 Madrid,
correo electrónico: ji_diaz@mat.ucm.es

Jacques-Louis Lions

por

Eduardo Casas

Transcurrido casi un año desde el fallecimiento del Profesor Jacques-Louis Lions y animado por algunas personas me he decidido a escribir unas breves líneas en su recuerdo, desde la perspectiva de mi relación personal con él y su influencia en mi actividad investigadora.

Mis primeras noticias sobre el Profesor Lions se producen cuando, terminados mis estudios de la Licenciatura en Matemáticas, comienzo a estudiar ecuaciones en derivadas parciales. Entonces descubro que la cita Jacques-Louis Lions y Enrico Magenes (*“Problèmes aux limites non homogènes et applications”*, 3 vols., Dunod 1968–70) era punto de referencia obligado de los textos y artículos de la época. Este nombre me vuelve a aparecer cuando inicio el estudio de los problemas no lineales (*“Quelques méthodes de résolution de problèmes aux limites non linéaires”*, Dunod 1969) o en el estudio de las ecuaciones variacionales (*“Les inéquations en mécanique et en physique”*, Dunod 1972, en colaboración con G. Duvaut; *“Analyse numérique des inéquations variationnelles”*, 2 vols., Dunod 1976, en colaboración con R. Glowinski y R. Trémolières). Finalmente, al iniciar mi tesis doctoral sobre problemas de control me veo envuelto de forma irremediable en la lectura de su libro *“Contrôle*

optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles”, Dunod 1968, la referencia obligada, que ha marcado toda una época en la Teoría de Control de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Tras este libro vendrían otros muchos libros y artículos sobre problemas de control de ecuaciones en derivadas parciales, abordando los sistemas lineales y no lineales, el desarrollo asintótico de las soluciones, etc. Una gran parte del trabajo de investigación del Profesor Lions se dedicó al estudio de la Teoría de Control de Sistemas Distribuidos, lo que ha influido enormemente en la investigación en este tema en todo el mundo. Su primer libro de control fue la base y el fundamento de los desarrollos ulteriores, al menos en lo referente al estudio de problemas de control óptimo. Por supuesto, se ha avanzado mucho en este terreno desde entonces, pero él abrió el camino y dio los primeros pasos que hemos seguido todos los que hemos trabajado en este área de la matemática.

He descrito cómo fue mi primer encuentro con la obra matemática de Jacques-Louis Lions, pero ¿cómo fue el encuentro con la persona? En el primer instante que yo creí que tenía algo que contar sobre teoría de control, pensé en redactar una nota para Comptes Rendus de la Acad. de Sciences de Paris y enviársela a la persona que más había influido en mi trabajo. Fui muy gratamente sorprendido por la celeridad con la que una persona tan ocupada respondió y aceptó mi artículo. Animado por el éxito, me decidí a escribir un segundo artículo y enviárselo de nuevo para su publicación en una revista diferente. Esta vez la respuesta no llegaba. Entre tanto yo había presentado mi tesis doctoral y me desplazé al INRIA para realizar una estancia de dos meses. En aquella época Jacques-Louis Lions era Presidente del INRIA e impartía su famoso curso en el Collège de France. Yo no podía perder la ocasión de conocerle y asistí a algunas de las sesiones. Quedé impresionado por la elegancia de sus exposiciones, su cordialidad, su capacidad para atender a todas las personas que acudíamos a él. Cuando vencí mi timidez y me atreví a preguntarle por aquel artículo del que yo no había recibido todavía respuesta, su contestación fue tan clara como demoledora. Aunque no recuerdo exactamente sus palabras, sí quedó muy claro su mensaje: ¡aquel artículo estaba muy mal escrito!. La persona a quien yo más admiraba como matemático, todo un modelo para mí, me acababa de decir que mi artículo estaba mal escrito. Esto era como para hundirse y desaparecer de su seminario, sin embargo él supo decírmelo de forma nada hiriente, de manera que yo no me desmoralicé, sino que me esforcé en aprender cómo se debía escribir un artículo e intentar no volver a vivir una experiencia similar. Posteriormente, reescribiría el artículo y aparecería en la revista que yo había pretendido en su primer momento. Pero allí, en ese momento, descubrí una faceta del Profesor Lions, su claridad a la hora de decir las cosas, pero también el respeto hacia su interlocutor, no importa que fuera un principiante que tenía muchas cosas por aprender. Siempre me pareció una persona con educación exquisita. Pasados los años me honró con su amistad y aceptó la invitación que le cursé para asistir al encuentro internacional sobre Control de Ecuaciones en Derivadas Parciales que organizamos en Laredo, en 1994. Pero en aquel congreso, sentado frente a

él en la cena de clausura, yo pensaba que había comenzado conociendo a un gran matemático y había terminado por descubrir a un gran hombre.

Eduardo Casas
Dpto. de Matematica Aplicada y C.C.
E.T.S.I. Industriales y de Telecomunicacion
Universidad de Cantabria
Av. Los castros s/n, 39005 Santander
correo electrónico: eduardo.casas@unican.es